

4.11) X - n.º de chamadas e emergência por dia

$$P(X=0) = 0,15 \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = 0,15 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,15$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\log(0,15) = 1,90$$

$$a) P(X=1) = \frac{e^{-1,9} \cdot 1,9^1}{1!} = 0,2842$$

$$b) P(X=2) = \frac{e^{-1,9} \cdot 1,9^2}{2!} = 0,2670$$

$$c) P(X \leq 3)$$

$$d) P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$e) E(X) = 1,9 \text{ chamadas}$$

$$\sigma(X) = 1,3784 \text{ chamadas}$$

$$CV(X) = 72,55\%$$

$$4.12) P(X=2) = \frac{2}{3} P(X=1) \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} = \frac{2}{3} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$$P(X=0) = e^{-4/3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 0,2636$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-4/3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3}{3!} = 0,1041$$

4.13) $X(1)$ - n.º de pessoas que utiliza o multissenso por hora

$$X(1) \sim P(10)$$

$$a) P(X(1)=0) = e^{-10} \cdot 10^0 = 4,54 \times 10^{-5}$$

$$b) P(X(4)=20) = \frac{e^{-40} \cdot 40^{20}}{20!} = 1,92 \times 10^{-4}$$

$$c) E(X(4)) = 40 \text{ pessoas}$$

$$CV(X(4)) = 15,81\%$$

4.14) X_i - n.º de veículos que passa na casinha i por minuto

$$X_i \sim P(1)$$

As variáveis X_i são independentes

$i = 1, \dots, 10$

$$T = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim P(10)$$

$$P(T=11) = \frac{e^{-10} \cdot 10^{11}}{11!} = 0,1137$$

4.15) X - no de erros no livro numa pag.

$$X \sim P\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$a) P(X=2) = \frac{e^{-\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}{2} = 0,0988$$

$$b) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) + P(X=1) = 0,1219$$

4.16) X - nº de peças quebradas por empacotado por mês

$$X \sim P(1.5)$$

$$a) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) \\ = 0,066$$

b) Y - prejuízo da empresa, por mês e por empacotado

$$Y = \begin{cases} 0 & 0,4 & 0,8 & 1,2 \\ P(X=0) & P(X=1) & P(X=2) & P(X \geq 3) \end{cases}$$

$$E(Y) = 0,4 \times P(X=1) + 0,8 \times P(X=2) + 1,2 \times P(X \geq 3) = 0,564 \text{ €}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{(1,2) - E^2(Y)} = 0,414 \text{ €}$$

4.17) X - no de chaves enganadas em 200

$$X \sim \text{Bin}(200, 0.02) \approx P(4)$$

com $n=200 > 50$ e $np=4 < 5$ entre outros fatores faz-se uma aproximação utilizando a distribuição de Poisson com $\lambda=4$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$\approx 1 - e^{-4} - e^{-4} \cdot 4 = 0,984$$

$$E(X) = 4 \text{ enganos}$$

4.18) X - n. de passagers intoxicados $n = 300$

$$X \sim \text{Bin}(300, 0,0005) \approx P(0,15)$$

$$n \gg 300 > 50$$

$$np = 0,15 \leq 5$$

$$P(X=2) \approx \frac{e^{-0,15} \cdot 0,15^2}{2!} = 0,0097$$

Distribuição Uniforme Contínua

$$x < a$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 0$$

$$a \leq x \leq b$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt$$
$$= \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x > b$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1$$

4.19) $X \sim U(0,1)$

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

$$b) P(0,4 < X < 0,6) = \int_{0,4}^{0,6} 1 dx = [x]_{0,4}^{0,6} = 0,2$$

$$c) E(X) = 0,5$$

$$CV(X) = 57,74\%$$

$$d) P(0,4 < X < 0,6 | X > 0,5) = \frac{P(0,5 < X < 0,6)}{P(X > 0,5)} = 0,2$$

e) Y - n. de vezes que acertar $n = 5$

$$Y \sim \text{Bin}(5, 0,2)$$

$$P(Y=3) = \binom{5}{3} 0,2^3 0,8^2 = 0,0512$$

4.20) X - tempo de atender um cliente

$$X \sim \text{Exp}(0,3)$$

$$E(X) = \lambda + \delta = 3 \Rightarrow \delta = 3$$

a) $x < 0$

$$P(X \leq x) = F(x) = 0$$

$x \geq 0$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{3} e^{-\frac{(t-0)}{3}} dt = - \left[e^{-\frac{t}{3}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{3}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

b) $P(X \geq 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{5}{3}} = 0,1889$

c) $P(X \geq 3) = 0,3679$

d) $P(X \geq 3 | X \geq 2) = P(X \geq 3) = 0,3679$

e) $CV(X) = \frac{3}{3} = 100\%$

4.21) $X(t)$ - no de clientes que chegam a loja por minuto

$$X(t) \sim P(2)$$

T - tempo entre chegadas consecutivas

a) $P(X(t)=0) = e^{-2} = 0,1353$

b) $P(T \leq 4) = 1 - P(T > 4) = 1 - P(X(4)=0) = 1 - e^{-8} = 0,99997$

c) $P(1 < T < 2) = P(T < 2) - P(T < 1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = 0,1170$

d) $P(X(5) \leq 2) = P(X(5)=0) + P(X(5)=1) + P(X(5)=2)$
 $= 0,0028$

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

T - tempo entre chegadas consecutivas

$$P(T > t) = P(X(t)=0) = e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$T \sim \text{Exp}\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$$

NPA

$$X \sim \text{Exp}(0, \beta)$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-x/\beta} = u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{\beta} = \log(1-u) \Leftrightarrow x = -\beta \log(1-u)$$

1) a) $\alpha = 3, \beta = 5$

$$F(x) = 1 - e^{-3x^5}, \quad x > 0$$

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-3x^5} = u \Leftrightarrow -3x^5 = \log(1-u)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-\frac{\log(1-u)}{3}}$$

Assim se u for um NPA da Uniforme $(0,1)$, então

$x = \sqrt[5]{-\frac{1}{3} \ln(1-u)}$ é um NPA da distribuição Weibull $(3,5)$

b) $u_1 = 0,2517 \Rightarrow x_1 = 0,6267$
 $u_2 = 0,7437 \Rightarrow x_2 = 0,8538$
 $u_3 = 0,1911 \Rightarrow x_3 = 0,5887$

3) $f(x) = 2x$
 $F(x) = x^2; \quad u_1 = 0,2517; \quad u_2 = 0,7437$

$$F(x) = u \Leftrightarrow x = \sqrt{u}$$

$$x_1 = 0,5017, \quad x_2 = 0,8624$$

4) a) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 0,4 & , 0 \leq x < 1 \\ 0,6 & , 1 \leq x < 2 \\ 0,7 & , 2 \leq x < 3 \\ \emptyset & , x \geq 3 \end{cases}$

Para gerar um NPA desta distribuição a partir de um valor u da uniforme, basta escolher

$$x = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u \leq 0,4 \\ 1 & , 0,4 < u \leq 0,6 \\ 2 & , 0,6 < u \leq 0,7 \\ 3 & , 0,7 < u < 1 \end{cases}$$

b) $x_1 = 3; x_2 = 3; x_3 = 0; x_4 = 1; x_5 = 3; x_6 = 0; x_7 = 1$

$$6.1) a) \mu = \sum_{i=0}^4 x_i \cdot P(x=x_i) = 1,91 \text{ filhos}$$

$$\sigma^2 = E((x-\mu)^2) = 1,4311 \text{ filhos}^2$$

b) (x_1, x_2) amostra aleatória

tem a mesma distribuição de probabilidade de x , ambos com valor médio $\mu = 1,91$ e variância $\sigma^2 = 1,4311$

$$c) \bar{x} = \frac{1}{10} \sum x_i = 1,6 \text{ filhos}$$

$$s^2 = \frac{1}{9} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2,04 \text{ filhos}^2$$

$$\hat{SE}_{\bar{x}} = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 0,4522$$

Seja $(x_1, \dots, x_n)$ uma amostra aleatória de uma população com valor médio μ e variância σ^2

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} n \mu = \mu$$

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(x_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$6.2) a) E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu \rightarrow \text{estimador centrado}$$

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(x_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \rightarrow \text{estimador consistente}$$

$$b) E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) = \frac{1}{2}(E(x_1) + E(x_n)) = \frac{1}{2} \cdot 2\mu \rightarrow \text{estimador centrado}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2x_1 + 3x_2 + 5x_3}{10}\right) = \frac{2}{10}E(x_1) + \frac{3}{10}E(x_2) + \frac{5}{10}E(x_3)$$

$$= \mu \rightarrow \text{estimador centrado}$$

$$V(\hat{\theta}_1) = V\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) = \frac{1}{4} V(x_1 + x_n) = \frac{1}{4} \cdot 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2} \neq 0 \rightarrow \text{estimador não é consistente}$$

$$V(\hat{\theta}_2) = V\left(\frac{2X_1 + 3X_2 + 5X_3}{10}\right) = \left(\frac{2}{10}\right)^2 V(X_1) + \left(\frac{3}{10}\right)^2 V(X_2) + \left(\frac{5}{10}\right)^2 V(X_3) \\ = \frac{4\sigma^2 + 9\sigma^2 + 25\sigma^2}{100} = \frac{9}{25} \sigma^2$$

$\hat{\theta}_2$ é melhor estimador porque tem menor variância

c) $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \neq \mu^2$

$(\bar{X})^2$ não é estimador centrado para μ^2

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E^2(\bar{X}) \\ \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} = E(\bar{X}^2) - \mu^2$$

6.3) a)

$$m_1 = M_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$$

O estimador dos momentos para θ é $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

b)

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2\frac{\theta}{2} \rightarrow \text{estimador centrado}$$

$$V(\hat{\theta}) = V(2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{12n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^2}{3n} = 0 \Rightarrow \text{estimador consistente}$$

c) $\hat{\theta} = 2 \cdot \frac{17,42}{10} = 3,484$

6.4) a) $m_1 = M_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \bar{X} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\bar{X}}$

O estimador dos momentos de p é

$$p^* = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p(X=x_i) = \prod_{i=1}^n \left(p(1-p)^{x_i-1} \right) = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} \\ = p^n (1-p)^{n\bar{x}-n} = p^n (1-p)^{n(\bar{x}-1)}$$

$$l(p) = \ln L(p) = \ln(p^n (1-p)^{n(\bar{x}-1)}) = n \ln p + n(\bar{x}-1) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} l(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} n(\bar{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{p} - \bar{x} + 1}{p(\frac{1}{p} - 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = \bar{x} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\bar{x}}$$

O estimador M.L. de p é $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$

$$b) n = \frac{1}{p}$$

$$\hat{p} = \bar{X}$$

6.5) a) X - n.º de lançamentos até sair par

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

$$u_1 = M_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \bar{X} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\text{est.} \rightarrow \text{da de } p \text{ é } \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 3,0667 \Rightarrow \hat{p} = 0,3261$$

$$\hat{P}(X=1) = \hat{p}(1-\hat{p})^{1-1} = 0,3261$$

$$b) \hat{P}(X > 2) = 1 - \hat{P}(X=1) - \hat{P}(X=2) = 0,4541$$

$$6.6) a) u_1 = M_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow np = \bar{X} \Leftrightarrow p = \frac{\bar{X}}{r}$$

$$\text{O est.} \rightarrow \text{da de } p \text{ é } \hat{p} = \frac{\bar{X}}{r}$$

$$\begin{aligned} b) \ell(p) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\binom{r}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{r-x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \binom{r}{x_i} + \sum_{i=1}^n \ln p^{x_i} + \sum_{i=1}^n \ln (1-p)^{r-x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \binom{r}{x_i} + n p \sum_{i=1}^n x_i + \underbrace{\ln(1-p) \sum_{i=1}^n (r-x_i)}_{\ln(1-p)(nr - \sum_{i=1}^n x_i)} \end{aligned}$$

$$c) \frac{\partial}{\partial p} \ell(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p} (nr - \sum_{i=1}^n x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-p) \sum_{i=1}^n x_i - p(nr - \sum_{i=1}^n x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - p \sum_{i=1}^n x_i - pnr + p \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - pnr = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\bar{X}}{r}$$

$$\text{O est.} \rightarrow \text{da M.L. de } p \text{ é } \hat{p} = \frac{\bar{X}}{r}$$

$$d) E(\hat{p}) = E\left(\frac{\bar{X}}{r}\right) = \frac{1}{r} E(\bar{X}) = \frac{rp}{r} \rightarrow \text{constr. do}$$

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{\bar{X}}{r}\right) = \frac{1}{r^2} V(\bar{X}) = \frac{1}{r^2} \frac{rp(1-p)}{n} = \frac{p}{rn} (1-p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ consistente}$$

6.7) $(x_1, \dots, x_n)$ uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, x > 1 \quad (\theta > 0)$

a) $m_1 = M_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{x} \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta-1} = \bar{x}$

$\Leftrightarrow \theta = \bar{x}\theta - \bar{x} \Leftrightarrow \theta - \bar{x}\theta = -\bar{x}$

$\Leftrightarrow \theta(1-\bar{x}) = -\bar{x} \Leftrightarrow \theta = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$

o estimador dos momentos de θ é $\theta^* = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$

b) $l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}\right) = \sum_{i=1}^n \left[\ln(\theta) - \ln(x_i^{\theta+1}) \right]$

$= n \ln \theta - \sum_{i=1}^n \ln(x_i^{\theta+1}) = n \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$

c) $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

o estimador ML de θ é $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

d) Pela propriedade da invariância temos $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{\theta}}$

$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}{n}$

6.8) X-idade de um cidadão do subsolo,
 $X \sim N(500000, 20000^2)$

Amostra aleatória

$(x_1, \dots, x_{10}), n=10$

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$P(\bar{x} > 490000) = P(Z > -1,58) = \Phi(1,58) = 0,9429$

6.9) população normal com média conhecida $\mu = 100$ e variância $\sigma^2 = 10^2$

a) $n = 25$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$m_1 = \mu_1 \Leftrightarrow E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \bar{X} = \mu$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \widehat{SE}(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\begin{aligned} P(96,08 < \bar{X} < 103,92) &= P(\bar{X} < 103,92) - P(\bar{X} < 96,08) \\ &= P(Z < 1,96) - P(Z < -1,96) = \Phi(1,96) - 1 + \Phi(1,96) = 0,95 \end{aligned}$$

b) $100 + 1,96 \times \sqrt{\frac{100}{n}} - 100 + 1,96 \times \sqrt{\frac{100}{n}} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{n} = \frac{1}{1,96^2} \Rightarrow n \geq 384,16$$

n tem de ser 385

6.10) X - "tempo de espera para deslocagem do aparelho"

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

população desconhecida μ
variância conhecida $\sigma^2 = 2,5^2$
e $n = 4$

amostra aleatória

$$(x_1, \dots, x_n), n = 50 \geq 30$$

$$P(\bar{X} > 5) = P(Z > 2,83) = 1 - \Phi(2,83) = 0,0023$$

6.11) X - "nº de ovos que as borboletas verdes depositam"

$$X \sim P(15)$$

$$n = 100$$

$$\widehat{SE}(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P(\mu - 3\widehat{SE}(\bar{X}) < \bar{X} < \mu + 3\widehat{SE}(\bar{X})) = P(13,84 < \bar{X} < 16,16)$$

$$= P(\bar{X} < 16,16) - P(\bar{X} < 13,84) = P(Z < 2,995) - P(-2,995)$$

$$= 2\Phi(2,995) - 1 = 0,9974$$

6.12) X - tempo vida de determinada espécie de sumos

$$X \sim \text{Exp}(\lambda, \delta)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim U(0,1)$$

$$\lambda + \delta = 25 \Rightarrow \delta = 25$$

Amostra aleatória

$$(X_1, \dots, X_n), n = 40 \geq 30$$

$$P(\bar{X} < 20) = P(Z < -1,26) = 1 - \Phi(1,26) = 0,1038$$

6.13)

$$n = 500, p = 0,45$$

Amostra aleatória

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P(\hat{p} > 0,5) = P(Z > 2,24) = 1 - \Phi(2,25) = 0,0122$$

6.14) pop Normal, μ e σ^2 desconhecidos, μ e σ^2 conhecidos $\sigma^2 = 5^2$

$$\text{amostra aleatória } (X_1, \dots, X_n), n = 20$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$P(26 < S^2 < 58) = P(S^2 < 58) - P(S^2 \leq 26)$$

$$= P(\chi^2 < 44,08) - P(\chi^2 < 19,76)$$

$$= 0,999 - 0,6 = 0,399$$

7.1) pop. normal com variância conhecida

a) 1. Estatística pivot $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

2. $P\left(-\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \alpha\right) = 0.9$

3. Determinar os extremos do intervalo

$$-3_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 3_{\alpha/2} \Leftrightarrow \bar{X} - 3_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 3_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4. Para a amostra observada

$$IC_{90\%}(\mu) =]\bar{x} - 3_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 3_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 320.9 & \alpha &= 0.1 \\ n &= 20 & 3_{\alpha/2} &= 1.64 \\ \sigma &= 20.9 \end{aligned}$$

$$IC_{90\%}(\mu) =]312.67; 327.33[$$

b) $2 \cdot 3_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{65.6}{\sqrt{n}} = 1 \Leftrightarrow n \geq 4303.36$

$$n > \left(\frac{65.6}{1}\right)^2 = 172.13$$

7.2) pop. Normal, com variância desconhecida

a) 1. estatística pivot $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

2. $P\left(-\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < \alpha\right) = 0.9$

3. Determinar os extremos do intervalo

$$-t_{n-1, \alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1, \alpha/2} \Leftrightarrow \bar{X} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

4. Para a amostra observada

$$IC_{90\%}(\mu) =]\bar{x} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}[$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 36 \\ s &= 10 \\ n &= 8 \\ t_{7, 0.05} &= 1.89 \end{aligned}$$

$$IC_{95\%}(\mu) =]27.67; 44.34[$$

$$IC_{90\%}(\mu) =]29.3; 42.7[$$

$$t_{7, 0.025} = 2.36$$

b) amostra $> 50 \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$IC_{90\%}(\mu) =] \bar{x} - 3_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 3_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} [=] 33,68 ; 38,32 [$$

$$\begin{aligned} n &= 50 \\ \bar{x} &= 36 \\ s &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3_{\alpha/2} &= 1,64 \\ \alpha &= 0,1 \end{aligned}$$

$$IC_{95\%}(\mu) =] 33,23 ; 38,77 [$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,05 \\ 3_{\alpha/2} &= 1,96 \end{aligned}$$

7.3) pop. normal, com variância desconhecida
 $n=10$

1. Estatística pivot $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

2. para um nível de confiança

$$1 - \alpha = 0,99$$

$$P(-\alpha < Z < \alpha) = 0,99$$

3. Determinar os valores do intervalo

$$-t_{n-1, \alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1, \alpha/2} \Leftrightarrow \bar{x} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

4. Para um teste aleatório

$$IC_{99\%}(\mu) =] \bar{x} - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} [$$

$$\bar{x} = 0,151$$

$$s = 0,106$$

$$t_{9, 0,005} = 3,25$$

$$IC_{99\%}(\mu) =] 0,042 ; 0,260 [$$

7.4) pop desconhecida σ^2 em variância σ^2

1. estatística pivot $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Suponhamos $n \geq 30$

2. por um nível de confiança

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$P(-a < Z < a) = 0.95$$

3. determinar os extremos do intervalo

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4. por um σ amostra desconhecida.

$$I_{0.95}(n) = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\sigma = 8$$

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2.5 \Leftrightarrow 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} < 2.5 \Leftrightarrow n > 157.4$$

R: para $\alpha = 0.05$ temos que ter $n \geq 158$

7.5) pop desconhecida σ variância desconhecida

1. estatística pivot $Z = \frac{\sqrt{n} \cdot \bar{X} - \mu}{S} \sim N(0,1)$

2. por um nível de confiança

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$P(-a < Z < a) = 0.95$$

3. Determinar os extremos do intervalo

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$